Journal of Surface Analysis Vol.12 No. 3 (2005) pp. 327 - 349

連載（講義）

電子光学入門
－ 電子分光装置の理解のために －
(第5回)

嘉藤 誠
日本電子 (株) 〒196-8558 東京都昭島市武蔵野 3-1-2
kato@jeol.co.jp
(2005年6月13日受理)

電子光学系の性能の優劣を決めるのは，線形の近軸特性からのずれの程度，すなわち収差です．そして，収差の定量的な評価を可能にするのが収差係数です．光学系を構成するレンズはそれぞれ非線形の作用をもち，その効果が光学系を伝わっていくことで最終的に像面での収差係数が決定します．今回は，収差係数が決定される過程，そしてその定性的な性質に関して述べます．

Introduction to Electron Optics for the Study of Energy Analyzing Systems (5)

M. Kato
JEOL Ltd., 3-1-2 Musashino, Akishima, Tokyo 196-8558.
kato@jeol.co.jp
(Received: June 13, 2005)

The first-order optical theory describes the behavior of electron beams in the vicinity of an optic axis. The deviation from the first-order properties is called aberration, which is represented numerically by a set of aberration coefficients. Each optical element generally has nonlinear lens action, and these effects are transferred to an image plane. This chapter describes this process and discusses the characteristics of aberration in an axially symmetric system.

5 光学系の収差と収差係数

5.1 はじめに

光学系の設計において，多くの場合に律速となるのは，与えられた制約のもとで収差をいかに減らすかという作業です．その過程において，収差の大小を評価するための量が収差係数です．光学レンズと電子レンズがもつ収差については，今までいくつか例を示してきました．本章では，収差係数の概念を導入したうえで，収差の種類と性質について詳しく議論します．

どんな光学系であっても，近軸理論の範囲内ではかならず理想的な結像が行われます．たとえば，光学顕微鏡や望遠鏡であれば，最終的な倍率さえ同じであればどんな光学系でも優劣がつきません．しかし現実には，非線形の作用，すなわち収差の程度によって，系の明るさや分解能が決まることになります．収差係数をもちいれば，そのような近軸特性からの逸脱の度合いの程度と特徴を，数値によって示すことができます．

電子光学系の収差係数の導出過程は難解であり，たとえ軸対称系に限っても，計算をフォローするのは楽ではありません．途中の数式があまりにも複雑であるため，行き先を見失うことなく最後までたどり着くのは大変です．

収差係数を導出する過程は，数学的には，非線形の常微分方程式を摂動論によって解く作業として扱われます．出発点となるのは，ニュートンの運動方程式と等価な，近似のない軌道方程式です．１次軌道方

程式を導く際には，軌道方程式から1次よりも高次の項をすべて落とすことで線形の方程式を得ました．収差の導出は，そこで捨てられていた高次の非線形項の寄与を取り入れることで行われます．

しかし重要なのは，そのような計算や，結果としての収差係数の表式ではありません．われわれにまず要求されるのは，光学系の収差がどのような決まり方をして，何によって変わるのかということです．たとえば，レンズの倍率を2倍にしたら球面収差はどう変わるか？ コマ収差が絞りの位置によって変化するのはなぜか？ といった疑問にたいして，数式を通してではなく言葉で説明できなければなりません．

そのような理解のために，やはり収差係数の導出過程を追うことは必要です．しかし，単に微分方程式の解法としての理解では不十分であり，その過程において光学的な解釈が伴っていなければなりません．

今回の章は，定性的な議論によって可能な範囲で収差係数の導出過程を示し，その知識をもとに収差の種類と性質を議論します．そこで本章では，本質がよく見えるように，光学レンズ系，およびそれと対応する静電型レンズの話に限定します．磁界レンズは次章の内容となりますが，そこでは磁場による電子軌道のねじれによって収差係数が複素数になるなど，光の分野にはない効果が現れてきます．

なお今回に限ったことではありませんが，前回予告の内容と異なってしまったことをお詫び致します．

5.2　収差係数とその意味

5.2.1　軌道方程式の非線形項

前章において静電レンズの1次軌道方程式を導きましたが，その過程を思い出しておきましょう．出発点になったのは，ニュートンの運動方程式から時間を消去した軌道方程式，すなわち，

$$\begin{cases} x'' = \dfrac{1}{2\Phi}\left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial x} - x'\dfrac{\partial\Phi}{\partial z}\right)(1+x'^2+y'^2) \\ y'' = \dfrac{1}{2\Phi}\left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial y} - y'\dfrac{\partial\Phi}{\partial z}\right)(1+x'^2+y'^2) \end{cases} \tag{1}$$

です．これによって，任意の静電場中の電子軌道 $x(z)$, $y(z)$ が決定されます．

上式において，$\Phi(x,y,z)$ は加速ポテンシャルであり，電子が (x,y,z) という位置に到達したときの運動エネルギーが $e\Phi(x,y,z)$ となるように，Φ の原点が定義されています．

系が z 軸まわりに軸対称であれば，加速ポテンシャルは円柱座標で $\Phi(r,z)$ というかたちに書け，これがラプラス方程式をみたすことから，つぎの展開式が導かれます．

$$\begin{aligned} \Phi(r,z) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^n(n!)^2}r^{2n}\phi^{(2n)}(z) \\ &= \phi(z) - \frac{1}{4}r^2\phi''(z) + \frac{1}{64}r^4\phi^{(4)}(z) \\ &\quad -\frac{1}{2304}r^6\phi^{(6)}(z) + \ldots \end{aligned} \tag{2}$$

ここで $\phi(z)$ は軸上ポテンシャル，すなわち z 軸上の加速ポテンシャルの値 $\Phi(0,z)$ です．

上式は，軸上での Φ の値が知れているとき，光軸から離れて行くときの Φ の変化を r のべき展開として与えています．すなわち，軸上から軸外へ向かっての展開です．高次の項を多く含めるほど，光軸から遠く離れた場所の Φ がより正確に与えられます．

この展開式を (1) に代入して，x，y，x'，y' について1次の項だけを残せば，次の1次軌道方程式が得られます．

$$\begin{cases} x'' + \dfrac{\phi'(z)}{2\phi(z)}x' + \dfrac{\phi''(z)}{4\phi(z)}x = 0 \\ y'' + \dfrac{\phi'(z)}{2\phi(z)}y' + \dfrac{\phi''(z)}{4\phi(z)}y = 0 \end{cases} \tag{3}$$

この線形の微分方程式に従う軌道は収差をふくまず，理想的なレンズ作用を示すのでした．この方程式をもとにして，光学系の近軸特性が議論されます．

さて，レンズの収差を考慮するためには，1次軌道方程式を導く際に無視していた高次の項を取り入れなければなりません．計算してみるとわかりますが，x，y，x'，y' に関して偶数次の項は現れず，高次項は3次，5次，9次のように続きます．

奇数次の項しか現れないのは軸対称性からくるものですが，これに関しては後に述べることにして，ここでは結果だけ記しておきます．(1) の第1式について，3次まで残した結果は次のようになります．

$$\begin{aligned} x'' + \frac{\phi'}{2\phi}x' + \frac{\phi''}{4\phi}x &= -\frac{\phi'}{2\phi}x'(x'^2+y'^2) \\ &\quad -\frac{\phi''}{4\phi}x(x'^2+y'^2) \\ &\quad +\frac{1}{8\phi}\left(\phi''' - \frac{\phi'\phi''}{\phi}\right)x'(x^2+y^2) \\ &\quad +\frac{1}{32\phi}\left(\phi^{(4)} - \frac{2\phi''^2}{\phi}\right)x(x^2+y^2) \end{aligned} \tag{4}$$

この右辺には未知関数としての $x(z)$ と $y(z)$ が両方含まれるので，(1) の第2式から導かれるもう一つの方

程式と連立して考えなければなりません．そのような一組の方程式が，3次収差を決定するための軌道方程式となります．

1次軌道方程式(3)においては，ϕ に関しての微分は2階微分までしか含まれていません．一方，3次項まで考慮した方程式(4)では，ϕ の4階微分まで現れています．これは(2)の展開式において，1次軌道に寄与するのは第2項まで，3次収差に寄与するのは第3項までであるということです．すなわち高次の近似ほど，光軸から離れた場所でのポテンシャル分布が反映されるわけです．

なお，(4)の右辺は，x，y，x'，y' に関しての多項式として特徴的なかたちをしています．これも系が軸対称であることの反映です．軸対称な系がどのような収差をもちうるかという議論の際に，このような対称性の考察が必要になってきます．(§5.3.2で詳しく述べます.)

さて，電子レンズの収差を研究するためには，(4)のような微分方程式を相手にする必要があるわけです．(4)には相対論補正が施されておらず，また磁場は考慮されていません．しかし，収差係数の説明のためにはこの形を示すだけで十分です．

(4)は右辺に未知関数の高次項を含んでいるので，非線形方程式となり，そのままでは解析的な扱いはできません．微分方程式論における一般常識として，「非線形の微分方程式は解けない」のです．もちろん，数値的に解くことは何の問題もなく可能です．しかし，それを行うのであれば，近似のない軌道方程式(1)を解けばよいわけです．つまりレイトレースです．わざわざ高次の項をおとす理由がありません．

上のような方程式を導く理由は，それから**収差係数** (aberration coefficient) というものが導入でき，その数値によって光学系の性能が評価できるということです．収差係数の導出過程においては，(4)のような非線形方程式にたいする数学的な処方が大部分を占めることになります．

重要なことは，このような方程式の解を導く途中で，収差係数という概念が自然に現れるのではないということです．収差係数というものがどのようなアイデアから導入され，どのような性質をもつかということを知る必要があります．

5.2.2 収差係数の導入

前節で導いた非線形方程式に最初から取り組むのは大変なので，ここでは光学レンズの収差を考えます．前節の結果を踏まえれば，光学レンズの収差のとりうる形についての推測が可能になります．

第4章の最初の節で，理想的なレンズ作用とはなにかを議論しました．Fig.1のような薄肉凸レンズを考えると，レンズは，入射した光線の入射高 x_1 と傾き x_1' に応じて，適当な屈折作用を与えるものとして扱えます．

屈折後の光線の傾きを x_2' とすると，レンズによる屈折作用がつぎの形で与えられるとき，理想的な結像作用が行われるのでした．

$$x_2' - x_1' = -\frac{1}{f}\,x_1 \tag{5}$$

ここで f はレンズの焦点距離です．上式は1次理論を与えるもので，いわゆるレンズ公式，

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \tag{6}$$

と等価です．もしレンズ作用がこのような理想的なものでなくなれば，それが収差として現れることになります．

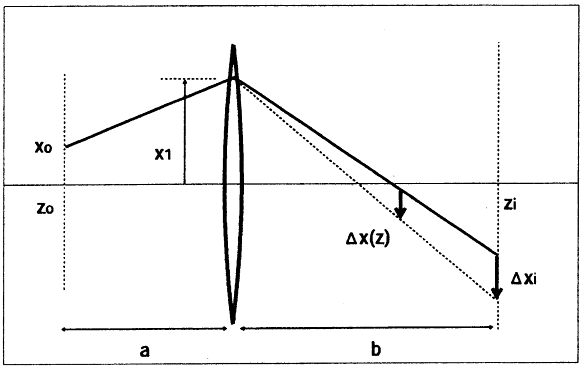

Fig. 1: Ideal lens action is realized when the change of inclination $x_2' - x_1'$ is proportional to the height x_1 of the ray in the entrance plane of the lens. When the lens action has nonlinear effects, aberration $\Delta x(z)$ appears.

(5)が意味するところは，入射前後の光線の傾きの変化量が入射高 x_1 に比例するということです．もしこの比例関係が厳密に成り立たなくなると，(5)の右辺には x_1 の高次の項が続くことになるでしょう．また(5)の右辺には入射光線の傾き x_1' が含まれていませんが，もし右辺が x_1' にも依存性するようになると，やはり収差の原因になるはずです．

ここで前節の(4)を思い出せば，3次までの議論と

して次のような関数形を想定できるでしょう．

$$x_2' - x_1' = -\frac{1}{f}\, x_1 + A{x_1'}^3 + B{x_1'}^2 x_1 + C x_1' {x_1}^2 + D{x_1}^3 \quad (7)$$

ここで A，B などはレンズによって決まる定数です．(4) の右辺は $y(z)$ を含んでいましたが，zx 平面上の軌道だけを考えることにすれば，$y = y' = 0$ と置くことができるので，上のかたちになります．

上式の右辺に付け加わった非線形項は，電子にたいしての言葉で言えば，レンズの出射面における電子軌道の傾きが，1次軌道からどれだけずれるかを与えます．(本章では「光線」と言ったり「軌道」と言ったりしますが，頭の中ではいつも電子軌道を考えています.) 以下において，(7) の非線形項がどのような収差をつくるのかを調べてみましょう．

まず，物面 $z = z_o$ における初期条件は，位置と傾きのセット (x_o, x_o') で指定されます．われわれが問題にするのは像面 $z = z_i$ における座標 x_i ですが，これも位置と傾きをまとめて (x_i, x_i') を考えます．

復習になりますが，初期条件は x_o と x_o' だけ与えればよく，x_o'' のような高階微分が含まれない理由を確認しておきましょう．光の場合は，光線の屈折の法則，すなわちスネルの法則がそれを必要としないからです．ある屈折面にたいしての光線の入射角に応じて出射角が決まる，というのが法則の内容でした．(5) や (7) の関係も，この事情を反映しているわけです．

一方，電子軌道の場合は，軌道方程式が2階の微分方程式に従うということの帰結です．さらにもとをたどれば，ニュートンの運動方程式が時間に関して2階の微分方程式であるということです．微分方程式論から，初期条件として (x_o, x_o') を指定すれば解は一意に決定されます．(第3章で示しましたが，光学の場合でも連続的な屈折率分布を想定すれば，光線の方程式はやはり2階の方程式になります．スネルの法則は，この光線方程式において屈折率の変化を不連続にした極限として得られます.)

このような事情から，光線や電子軌道の変化を追うために状態平面 xx' というものを考えたわけです．この平面上において光学系のはたらきを把握することで，第4章で述べたエミッタンスのような重要な概念が生まれてきます．状態平面で見た1次軌道の軌跡は，転送行列（トランスファーマトリックス）による1次変換として与えられるのでした．

そこで，Fig.1の状況にもどり，光線の状態 (x, x') の変化を追ってみましょう．まず物面からレンズ入射面までの，長さ a のドリフト空間における変換は，

$$\begin{cases} x_1 = x_o + a x_o' \\ x_1' = x_o' \end{cases} \quad (8)$$

となります．レンズ作用は，入射面から出射面への，同一の z 座標における変換として，

$$\begin{cases} x_2 = x_1 \\ x_2' = x_1' - \dfrac{1}{f}\, x_1 + R(x_1, x_1') \end{cases} \quad (9)$$

と書けます．ここでは簡単のために，(7) の右辺の非線形項を $R(x_1, x_1')$ と書いています．最後に，長さ b のドリフト空間では，

$$\begin{cases} x_i = x_2 + b x_2' \\ x_i' = x_2' \end{cases} \quad (10)$$

となります．以上を行列形式で書くなら次のようになります．

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_o \\ x_o' \end{pmatrix} \quad (11)$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ R \end{pmatrix} \quad (12)$$

$$\begin{pmatrix} x_i \\ x_i' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2' \end{pmatrix} \quad (13)$$

さらに上式において，二つのドリフト空間の転送行列を T_a，T_b，収差のないときのレンズ作用を与える転送行列を T_L とおけば，次のように書かれます．

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}_1 = T_a \boldsymbol{x}_o \\ \boldsymbol{x}_2 = T_L \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{p} \\ \boldsymbol{x}_i = T_b \boldsymbol{x}_2 \end{cases} \quad (14)$$

上式において，第2式の $\boldsymbol{p} = (0, R)$ がレンズの非線形の作用を示します．

一般に，転送行列は1次の光学性質を与えるものであり，その中に非線形の作用が含まれることはありません．上の第2式では非線形の効果が $\boldsymbol{p}$ として付加されていて，$\boldsymbol{x}_1$ と $\boldsymbol{x}_2$ の関係は1次変換ではなくなることに注意しましょう．

さて (14) は，初期状態 $\boldsymbol{x}_o$ から出発して，中間の状態 $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$ を経て最終的に $\boldsymbol{x}_i$ にいたるまでの状態の変化を示しています．これら三式から中間の状態を消